Prova do teorema de Tychonoff com ênfase em teoria dos conjuntos

Bruno Félix Rezende Ribeiro
oitofelix@ufu.br

FAMAT — Universidade Federal de Uberlândia

1 de outubro de 2017

Resumo

Neste trabalho demonstra-se o teorema de Tychonoff na sua forma mais geral para espaços topológicos quaisquer com ênfase em teoria dos conjuntos. Presume-se o lema de Zorn.

Index terms— Tychonoff Theorem, Set Theory, Topology

Definição 1 (Propriedade da Interseção Finita — PIF)**.** *Seja X um conjunto e $\mathcal{S} \subset \wp(X)$. A coleção $\mathcal{S}$ tem a propriedade da interseção finita se $\varnothing \notin \{\cap\mathcal{R}\}_{\mathcal{R}\subset\mathcal{S}}^{0<|\mathcal{R}|<\infty}$.*

Nota: *a satisfação da PIF por S se denota por "PIF$(\mathcal{S})$".*

Definição 2 (Ultrafiltro)**.** *Seja X um conjunto e $\mathcal{F} \subset \wp(X)$. A coleção $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro de X se $\{\mathcal{G}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{G}\subset\wp(X)}^{PIF(\mathcal{G})} = \{\mathcal{F}\}$.*

Nota: *um ultrafiltro é portanto uma coleção PIF maximal segundo a inclusão de conjuntos.*

Proposição 3. *Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro de X. Então vale:*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(ii) $\{\cap A\}_{A\subset\mathcal{F}}^{0<|A|<\infty} \subset \mathcal{F}$;

(iii) $\{B \mid A \subset B\}_{B\subset X}^{A\in\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$;

(iv) $\{B \mid \varnothing \notin \{A \cap B\}_{A\in\mathcal{F}}\}_{B\subset X} \subset \mathcal{F}$;

Demonstração. (i) Suponha por absurdo que $\varnothing \in \mathcal{F}$. Tome $A \subset \mathcal{F}$ tal que $0 < |A| < \infty$, satisfazendo $\varnothing \in A$. Claramente, $\cap A = \varnothing$ e portanto não é o caso que PIF$(\mathcal{F})$, o que é absurdo.

(ii) Seja $A \subset \mathcal{F}$ tal que $0 < |A| < \infty$. Tome $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{\cap A\}$, e observe que $\mathrm{PIF}(\mathcal{G})$. Logo, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ (pois $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ é maximal) e então $\cap A \in \mathcal{F}$.

(iii) Seja $B \subset X$ e $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$. Tome $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{B\}$, e observe que $\mathrm{PIF}(\mathcal{G})$. Logo, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ (pois $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ é maximal) e então $B \in \mathcal{F}$.

(iv) Seja $B \subset X$ tal que para qualquer $A \in \mathcal{F}$, tem-se $A \cap B \overset{(1)}{\neq} \varnothing$. Tome $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{B\}$, e observe que $\mathrm{PIF}(\mathcal{G})$, pelo item (ii) e (1). Logo, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ (pois $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ é maximal) e então $B \in \mathcal{F}$.

□

Teorema 4 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto não vazio, parcialmente ordenado e com limite superior para toda cadeia (subconjunto totalmente ordenado) tem elemento maximal.*

Demonstração. Exercício para o leitor. □

Nota: equivalente ao axioma da escolha.

Proposição 5. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subset \wp(X)$ tal que $PIF(\mathcal{S})$. Então existe um ultrafiltro $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$.*

Demonstração. Caso $X = \varnothing$ temos que $S = \mathcal{F} = \varnothing$. Suponha agora que $X \neq \varnothing$. Considere o conjunto, parcialmente ordenado pela inclusão,

$$\mathbb{E} = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{F}\}_{\mathcal{F} \subset \wp(X)}^{\mathrm{PIF}(\mathcal{F})} \neq \varnothing \text{ (pois } \mathcal{S} \in \mathbb{E}).$$

Prosseguimos para mostrar que que toda cadeia de $\mathbb{E}$ é limitada superiormente em $\mathbb{E}$. Seja $\mathbb{C} \subset \mathbb{E}$ totalmente ordenado (uma cadeia em $\mathbb{E}$). Caso $\mathbb{C} = \varnothing$, o resultado segue trivialmente. Suponha então que $\mathbb{C} \neq \varnothing$. Afirmamos que $\cup\mathbb{C}$ é um limite superior de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{E}$. Primeiramente, note que dado $\mathcal{G} \in \mathbb{C}$, tem-se $\mathcal{G} \subset \cup\mathbb{C}$. Agora, para provar que $\cup\mathbb{C} \in \mathbb{E}$ basta mostrar que $\mathrm{PIF}(\cup\mathbb{C})$. Seja $\mathcal{G} \subset \cup\mathbb{C}$, tal que $0 < |\mathcal{G}| < \infty$. Tome então $\mathcal{H} \in \{\mathcal{J}\}_{\mathcal{J} \in \mathbb{C}}^{\mathcal{G} \subset \mathcal{J}}$ e observe que como $\mathcal{H} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{E}$, temos que $\mathrm{PIF}(\mathcal{H})$. Dado então que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, temos $\cap\mathcal{G} \neq \varnothing$ e portanto $\mathrm{PIF}(\cup\mathbb{C})$. Pelo **lema de Zorn**, $\mathbb{E}$ tem um elemento maximal $\mathcal{F}$. Segue pela definição de $\mathbb{E}$ que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro e $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. □

Definição 6 (Espaço Topológico)**.** *Sejam X um conjunto qualquer e $\tau \subset \wp(X)$. O par (X, τ) é um espaço topológico se satisfaz*

(i) $X, \varnothing \in \tau$*;*

(ii) $\{\cup B\}_{B \subset \tau} \subset \tau$*;*

(iii) $\{\cap B\}_{B \subset \tau}^{|B| < \infty} \subset \tau$*;*

Nota: *τ é chamado de "topologia" e seus elementos de "abertos".*

Definição 7 (Base)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $B \subset \tau$ é uma base deste espaço se $\{\cup C\}_{C \subset B} = \tau$.*

Nota: *os elementos de B são chamados "abertos básicos".*

Definição 8 (Sub-base)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $B \subset \tau$ é uma sub-base deste espaço se $\{\cap C\}_{C \subset B}^{|C|<\infty} \cup \{X\}$ é uma base do mesmo.*

Definição 9 (Fecho)**.** *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $S \subset X$. O fecho de S é*

$$\bar{S} = \{x \in X \ \mid \ \varnothing \notin \{U \cap S\}_{x \in U \in \tau}\}.$$

Definição 10 (Compacidade)**.** *Um espaço topológico (X, τ) é compacto se*

$$\varnothing \notin \left\{\cap \{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{S}} \ \mid \ PIF(\mathcal{S})\right\}_{\mathcal{S} \subset \wp(X)}^{|\mathcal{S}|>0}.$$

Definição 11 (Produto Cartesiano)**.** *Sejam $I \neq \varnothing$ um conjunto e $\{X_i\}_{i \in I}$ uma coleção de conjuntos. O produto cartesiano desta coleção é dado por*

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \cup \{X_i\}_{i \in I}\}_{i \in I}^{f(i) \in X_i} = \{(x_i)\}_{i \in I}^{x_i \in X_i}.$$

Definição 12 (Projeção)**.** *Para cada $i \in I$ função projeção do produto cartesiano da família $\{X_i\}_{i \in I}$ sobre o conjunto X_i é dada por*

$$p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$$
$$f \to f(i).$$

Definição 13 (Topologia do Produto)**.** *Sejam $I \neq \varnothing$ um conjunto, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma coleção de espaços topológicos, $X = \prod_{i \in I} X_i$ e τ a topologia cuja sub-base é $\{p_i^{-1}(U_i)\}_{i \in I}^{U_i \in \tau_i}$. Define-se o espaço topológico do produto cartesiano como (X, τ).*

Nota: *Neste contexto τ também é chamado de topologia de Tychonoff.*

Teorema 14 (Tychonoff)**.** *Sejam $I \neq \varnothing$ um conjunto e $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma coleção de espaços topológicos compactos. Então, o espaço topológico de seu produto cartesiano é compacto.*

Demonstração. Seja (X, τ) o espaço topológico do produto cartesiano em questão. Seja $\mathcal{S} \subset \wp(X)$ tal que $S \neq \varnothing$ e $\mathrm{PIF}(\mathcal{S})$. Pela *Proposição 5* existe um ultrafiltro $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Para cada $i \in I$ considere o conjunto $\mathcal{F}_i = \{p_i(A)\}_{A \in \mathcal{F}} \subset \wp(X_i)$. Provaremos que $\mathrm{PIF}(\mathcal{F}_i)$. Seja $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}_i$, tal que $0 < |\mathcal{G}_i| < \infty$. Portanto, existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tal que $0 < |\mathcal{G}| < \infty$, satisfazendo $\mathcal{G}_i = \{p_i(A)\}_{A \in \mathcal{G}}$. Como $\mathrm{PIF}(\mathcal{F})$, então $\cap \mathcal{G} \neq \varnothing$. Portanto $\cap \mathcal{G}_i \neq \varnothing$ (pois $p_i(\cap \mathcal{G}) \subset \cap \mathcal{G}_i$) e logo $\mathrm{PIF}(\mathcal{F}_i)$. Visto que X_i é compacto, temos que existe

$$x_i \in \cap \{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{F}_i} \stackrel{(1)}{=} \cap \{\overline{p_i(A)}\}_{A \in \mathcal{F}} \neq \varnothing.$$

Portanto, para todo $A \in \mathcal{F}$, temos

$$x_i \in \overline{p_i(A)} = \{x \in X_i \mid \varnothing \notin \{U \cap p_i(A)\}_{x \in U \in \tau_i}\}.$$

Logo, para todo $U \in \tau_i$, com $x_i \in U$, vale $U \cap p_i(A) \overset{(2)}{\neq} \varnothing$. Tome $x = (x_i) \in X$ (uso implícito do axioma da escolha). Provemos que $x \in \cap\{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{S}}$. Seja $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Pela definição da topologia do produto, existe um conjunto básico V tal que $x \in V \overset{(3)}{\subset} U$, onde

$$V = \cap\{p_{i_k}^{-1}(U_k) \mid U_k \in \tau_{i_k}\}_{k \in \{1,\ldots,n\}}^{\{i_1,\ldots,i_n\} \subset I}.$$

Observe que, por (1), para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $x_{i_k} \in \cap\{\overline{p_{i_k}(A)}\}_{A \in \mathcal{F}}$. Dado que $x \in p_{i_k}^{-1}(U_k)$ (pois $x \in V$), temos que $x_{i_k} \in U_k$. Por (2), para todo $A \in \mathcal{F}$, tem-se $U_k \cap p_{i_k}(A) \neq \varnothing$ e logo $p_{i_k}^{-1}(U_k) \cap A \neq \varnothing$ (pois $p_{i_k}^{-1}(U_k \cap p_{i_k}(A)) \subset p_{i_k}^{-1}(U_k) \cap A$). Pela *Proposição (3.iv)*, temos $B = \{p_{i_k}^{-1}(U_k)\}_{k \in \{1,\ldots,n\}} \subset \mathcal{F}$, e então pela *Proposição (3.ii)* chegamos a $V = \cap B \in \mathcal{F}$. Por (3) e pela *Proposição (3.iii)*, concluímos que $U \in \mathcal{F}$. Em particular, $U \cap A \neq \varnothing$ para todo $A \in \mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Logo, $x \in \cap\{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{S}}$ e portanto X, τ é compacto. $\square$